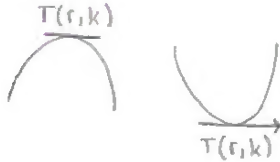
PARABOL

a, b, c birer reel sayı ve $a \neq 0$ olmak üzere

$f(x) = ax^2 + bx + c$ şeklindeki fonksiyonlara **ikinci dereceden denklem** adını veriyoruz. Bu fonksiyonların analitik düzlemdeki grafiklerine **parabol** denir.

• **$y = ax^2 + bx + c$ parabolünün grafiğinin çizilmesi:**

1) Tepe noktasının koordinatları bulunur.



$r = -\frac{b}{2a}$ ve $k = f(r)$ $\left[\text{yada } k = \frac{4ac - b^2}{4a} \right]$

$y = -x^2 + 6x - 8$ fonksiyonunun gösterdiği eğrinin tepe noktası

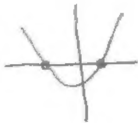
$r = -\frac{b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3$

$k = f(r) = f(3) = -9 + 18 - 8 = 1$

$T(3,1)$

2) $x = 0$ için y eksenini kestiği nokta ve $y = 0$ için x eksenini kestiği nokta bulunur.

• $\Delta > 0$ ise x eksenini farklı iki noktada keser.



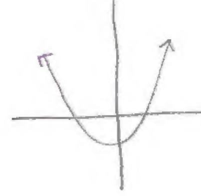
• $\Delta = 0$ ise x eksenine teğettir.



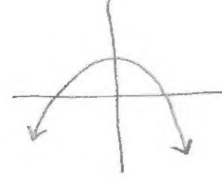
• $\Delta < 0$ ise parabol x eksenini kesmez.



3) $a > 0$ ise kollar yukarı bakar.



$a < 0$ ise kollar aşağıya bakar.



1) $y = x^2 - 4x - 12$ parabolünün grafiğini çiziniz?

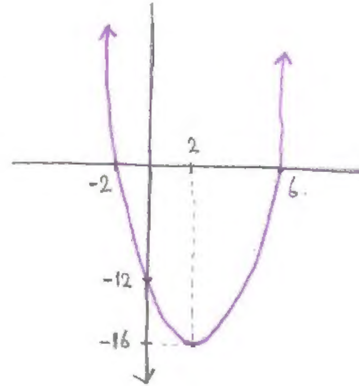
$r = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$

$k = f(2) = 4 - 8 - 12 = -16$ } $T(2,-16)$

$x = 0$ için $y = -12$ de keser.

$y = 0$ için $x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x-6).(x+2) = 0 \Rightarrow x = 6$ ve $x = -2$ de keser.



2) $y = x^2 - 6x + 9$ parabolünün grafiğini çiziniz?

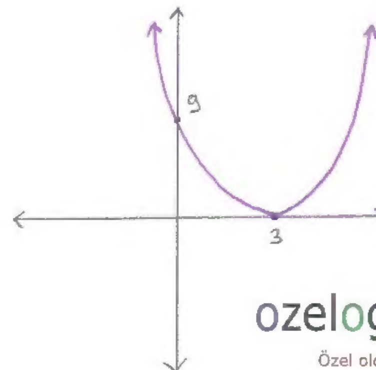
$r = -\frac{b}{2a} = 3$

$k = f(3) = 9 - 18 + 9 = 0$ } $T(3,0)$

$x = 0$ için $y = 9$ da keser. $y = 0$ için $x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x-3)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 3$ de keser.



3) $y=(x+3)^2+3$ parabolünün grafiğini çiziniz?

$y=x^2+6x+9+3$

$y=x^2+6x+12$

$r=-\frac{b}{2a}=-3$

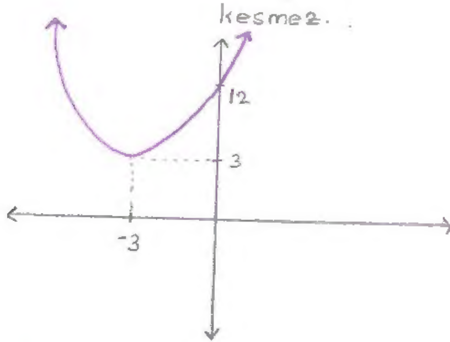
$k=f(-3)=9-18+12=3$

} $T(-3,3)$

$x=0$ için $y=12$ de keser.

$y=0$ için $x^2+6x+12=0$

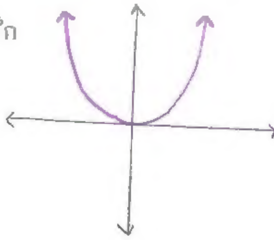
$\Delta<0$ olduğundan x eksenini kesmez.



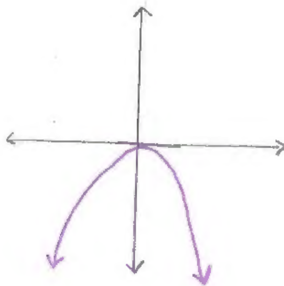
☺ Özel durumlar...

• $y=ax^2$ şeklindeki fonksiyonların grafikleri

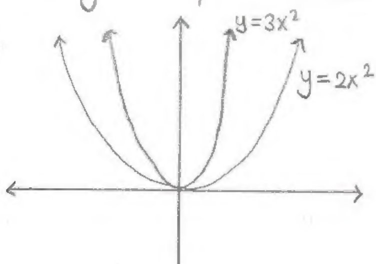
$a>0$ için



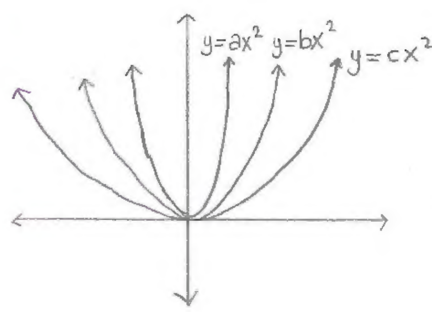
$a<0$ için



4) $y=2x^2$ ve $y=3x^2$ parabollerinin grafiklerini çiziniz.



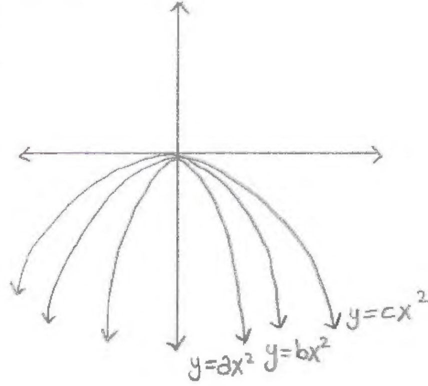
5)



Yukarıda $y=ax^2$, $y=bx^2$ ve $y=cx^2$ parabollerinin grafikleri verilmiştir.
Buna göre a,b,c nin sıralaması nasıldır?

$a>b>c$

6)

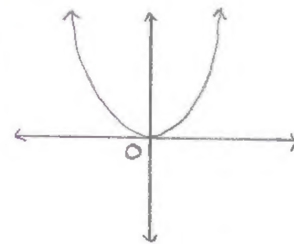


Yukarıda $y=ax^2$, $y=bx^2$ ve $y=cx^2$ parabollerinin grafikleri verilmiştir.
Buna göre a,b,c nin sıralaması nasıldır?

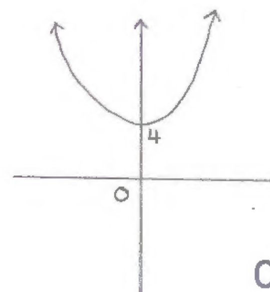
$c>b>a$

• $y=ax^2+c$ parabolünün grafiği çizilirken önce $y=ax^2$ çizilir sonra $c>0$ ise parabol c birim kadar yukarı kaydırılır, $c<0$ ise parabol c birim kadar aşağıya kaydırılır.

7) $y=x^2+4$ parabolünün grafiğini çiziniz.

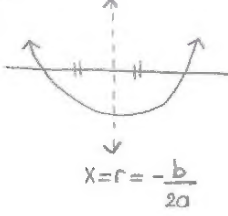


$\Rightarrow y=x^2$



$\Rightarrow y=x^2+4$

• **Simetri ekseni:** $x = r = -\frac{b}{2a}$ doğrusu simetri eksenidir ve parabolü iki eşit parçaya ayırır.



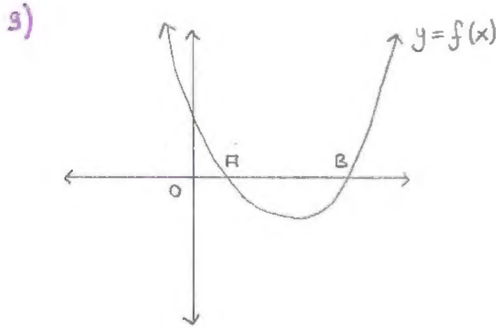
8) $f(x) = x^2 - (m+1)x + 2m + 3$ parabolünün simetri ekseni $x = 2$ doğrusu ise bu parabolün y eksenini kestiği noktanın ordinatı nedir?

$x = r = -\frac{b}{2a} = 2$

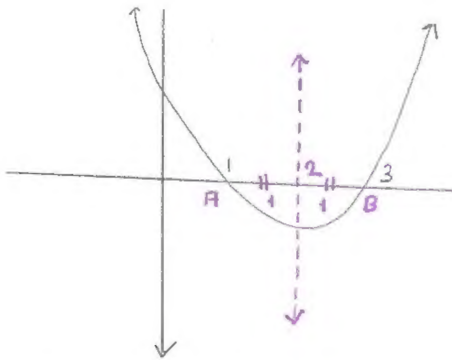
$\frac{m+1}{2} = 2 \Rightarrow m = 3$

$y = x^2 - 4x + 9 \Rightarrow x = 0$ için $y = 9$ da keser.

9)



Şekilde $y = x^2 - 4x + 2m - 1$ parabolünün grafiği verilmiştir. $|AB| = 2$ birim olduğuna göre m nedir?



$x = r = -\frac{b}{2a}$

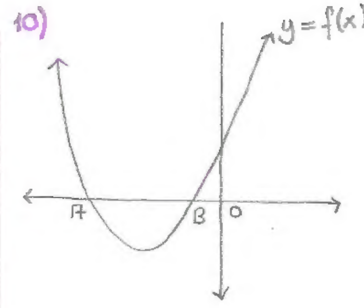
$\Rightarrow r = 2$

A ya da B noktası denklemde yerine yazılarak m değeri bulunur.

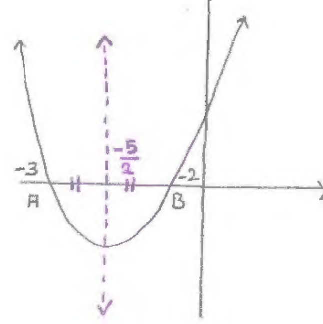
A(1,0) yerine yazılırsa $1 - 4 + 2m - 1 = 0$

$2m = 4 \Rightarrow m = 2$

10)



Şekilde $y = x^2 + 5x + m$ parabolünün grafiği verilmiştir. $|AB| = 1$ birim ise m değeri nedir?

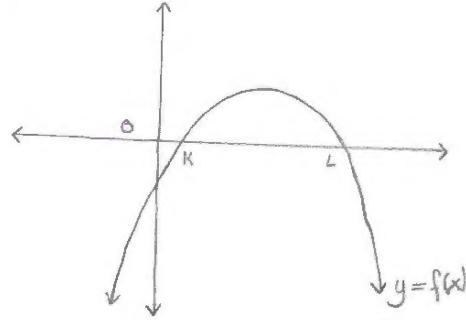


$x = r = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2}$

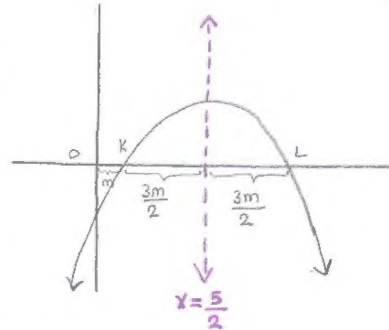
A(−3,0) denklemde yerine yazılırsa

$9 - 15 + m = 0 \Rightarrow m = 6$

11)



Yukarıdaki şekilde denklemi $y = -x^2 + 5x - 3m - 1$ olan fonksiyonun grafiği verilmiştir. $|OL| = 4 \cdot |OK|$ olduğuna göre m kaçtır?



$x = r = \frac{5}{2}$

$m + \frac{3m}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5m}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow m = 1$

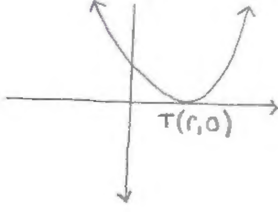
K(1,0) denklemde yerine yazılırsa

$-1 + 5 - 3m - 1 = 0$

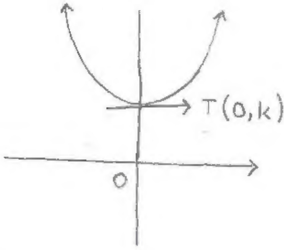
$3 = 3m$

$\Rightarrow m = 1$

Bir parabolün tepe noktası ox ekseni üzerinde ise k değeri sıfırdır. (yada $\Delta = 0$ dır)



Bir parabolün tepe noktası oy ekseni üzerinde ise r si sıfırdır.



12) $f(x) = mx^2 - (4-2m).x + 2$ parabolünün tepe noktası oy ekseni üzerinde ise m nin değeri nedir?

$r = -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow \frac{4-2m}{2m} = 0 \Rightarrow m = 2$

13) $y = ax^2 - 8x + 2a - 4$ eğrisi x-eksenine teğet olduğuna göre a nedir?

$\Delta = 0$

$64 - 4.a.(2a-4) = 0$

$64 - 8a^2 + 16a = 0$

$8 - a^2 + 2a = 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 8 = 0$

$(a-4).(a+2) = 0$

$\Rightarrow a = 4$ veya $a = -2$ olabilir.

14) $y = x^2 + (m-1).x + 1$ parabolü x-eksenine eksenin pozitif tarafında teğet olduğuna göre m nin değeri nedir?

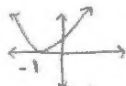
$\Delta = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4.1.1 = 0$

$m^2 - 2m + 1 - 4 = 0$

$m^2 - 2m - 3 = 0$

$(m-3).(m+1) = 0 \Rightarrow m = 3$ ve $m = -1$ dir.

$m = 3$ için $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \Rightarrow$



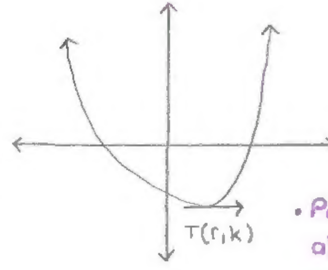
$\boxed{m = -1}$ için $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \Rightarrow$



• Parabolün en büyük ve en küçük değerinin bulunması:

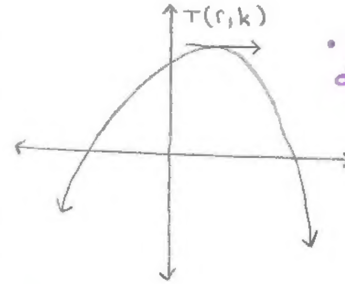
$y = ax^2 + bx + c$ parabolünde

$a > 0$ iken;



• Parabol en küçük değerini alır ve en küçük değeri k dır.

$a < 0$ iken;



• parabol en büyük değerini alır ve en büyük değeri k dır.

15) $A = 2 + x$

$B = -x + 6$ olduğuna göre A.B nin en büyük değeri nedir?

$A.B = (2+x).(-x+6)$

$= -2x + 12 - x^2 + 6x$

$= -x^2 + 4x + 12$

$r = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow k = f(2) = -4 + 8 + 12 = 16$

16) x bir reel sayı olmak üzere

$f(x) = 3^{x^2 - 4x - 2}$ fonksiyonunun alabileceği en küçük değeri nedir?

$r = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow x = 2$ de fonksiyon en küçük değerini alır.

$k = f(2) = 3^{4-8-2}$

$= 3^{-6}$

$\Rightarrow k = \frac{1}{3^6}$

17) a ve b birer reel sayı ve $A=-a^2+8a+1$, $B=b^2+18b+5$ olduğuna göre A nın en büyük sayı değeri ile B nin en küçük sayı değeri toplamı nedir?

$A=-a^2+8a+1$ için

$r=\frac{-8}{-2}=4 \Rightarrow k=f(4)=-16+32+1$
$=17$ (A nın en büyük değeri)

$B=b^2+18b+5$ için

$r=\frac{-18}{2}=-9 \Rightarrow k=f(-9)=81-162+5$
$=-81+5$
$=-76$ (B nin en küçük değeri)

$-76+17=-59$

18) $y=-2x^2-8x+m-2$ fonksiyonunun en büyük değeri 8 olduğuna göre m nin değeri nedir?

$x=r=\frac{8}{-4}=-2$

$k=f(-2)=-8+16+m-2=8$
$6+m=8 \Rightarrow m=2$

19) x liraya alınan bir mal, y liraya satılmaktadır. x ile y arasında $y=x^2-7x+40$ bağıntısı varsa bu malın satışından elde edilen kar en az kaç liradır?

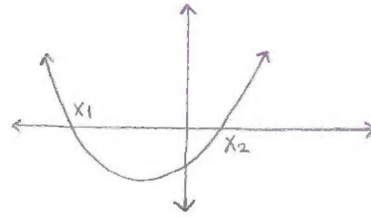
kar: $y-x=x^2-7x+40-x$
$=x^2-8x+40$

$x=r=\frac{+8}{2}=4$

$k=f(r)=f(4)=16-32+40$
$=-16+40$
$=24$

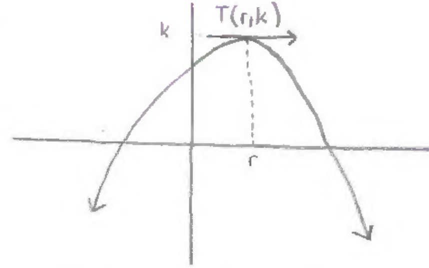
• Grafiği verilen parabolün denkleminin yazılması:

☺ x eksenini kestiği iki nokta belli ise:



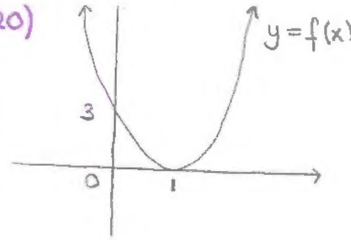
$$y=a.(x-x_1).(x-x_2)$$

☺ Parabolün tepe noktası belli ise:



$$y=a.(x-r)^2+k$$

20)



Yandaki şekilde $y=f(x)$ parabolünün grafiği verilmiştir. Buna göre f(3) nedir?

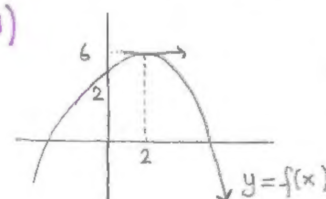
Tepe noktası (1,0) belli olduğundan

$y=a.(x-1)^2+0$
$y=a(x-1)^2$

(0,3) noktası kullanılırsa $3=a$ dır.

$f(x)=3.(x-1)^2 \Rightarrow f(3)=12$

21)



Yandaki şekilde $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre f(5) nedir?

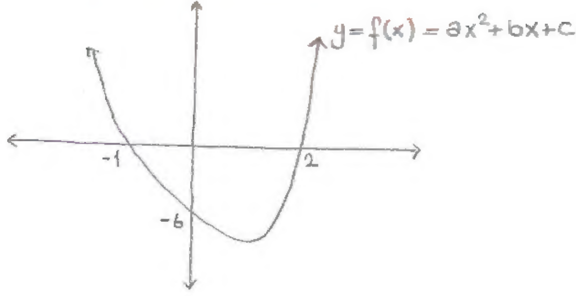
$y=a.(x-2)^2+6$ parabolünde (0,2) yerine yazılırsa

$2=4a+6 \Rightarrow -4=4a \Rightarrow a=-1$

$y=-(x-2)^2+6$

$f(5)=-3$

22)



Yukarıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre $|a-c|$ nedir?

x eksenini kestiği iki nokta belli ise

$y=a.(x-x_1).(x-x_2)$

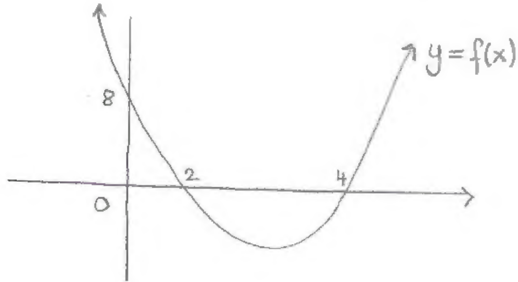
$y=a.(x+1).(x-2)$ denkleminde $(0,-6)$ yerine yazılırsa

$-6=-2a \Rightarrow a=3$

$f(x)=3.(x+1).(x-2)=3.(x^2-x-2)=3x^2-3x-6$

$|a-c|=|3-(-6)|=9$

23)



Yukarıda verilen grafik $y=f(x)$ fonksiyonuna aittir. Buna göre $f(10)$ nedir?

$y=a.(x-2).(x-4)$

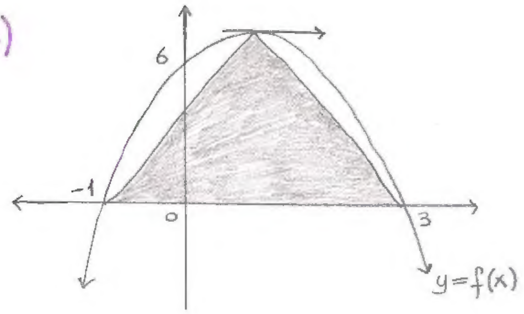
$(0,8)$ için $8=8a \Rightarrow a=1$

$f(x)=1.(x-2).(x-4)$
$=x^2-6x+8$

$\Rightarrow f(x)=x^2-6x+8$

$f(10)=100-60+8$
$=48$

24)



Yukarıda $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre taralı bölgenin alanı nedir?

$y=a.(x+1).(x-3)$

$6=-3a \Rightarrow a=-2$

$y=-2(x^2-2x-3)$
$=-2x^2+4x+6$

$r=\frac{-4}{-4}=1$

$k=f(1)=-2+4+6=8 \Rightarrow T(1,8)$

$\text{Alan}=\frac{4.8}{2}=16$

• **Parabol ile doğrunun düzlemdeki durumu:**

$y=ax^2+bx+c$ parabolü ile $g(x)=mx+n$ doğrularının durumları incelenirken önce birbirine eşitlenir, bütün her şey bir tarafta toplanarak Δ incelenir.

$ax^2+bx+c=mx+n$

$ax^2+(b-m)x+c-n=0$

- $\Delta>0$ ise parabol ile doğru iki farklı noktada kesişir.



- $\Delta=0$ ise parabol ile doğru birbirine teğettir.



- $\Delta<0$ ise parabol ile doğru birbirini kesmez.



☺ $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık

$A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$

$$|AB| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

☺ Orta nokta bulunurken

(x_1, y_1) (x_2, y_2)
A B

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

25) Denklemi $y=\frac{x^2}{a}$ olan parabol, a nın hangi değeri için denklemi $x-y=1$ olan doğruya teğettir?

$\frac{x^2}{a} = x-1 \Rightarrow x^2 = ax-a$

$x^2-ax+a=0$

$\Delta=0$

$a^2-4.1.a=0$

$a(a-4)=0 \Rightarrow a\neq 0$ ya da $a=4$ tür.

26) $x-y+2=0$ doğrusunun $y^2=2px$ parabolüne teğet olması için p nin değeri ne olmalıdır?

$y=x+2$ ve $y=\sqrt{2px}$

$x+2=\sqrt{2px}$

$x^2+4x+4=2px$

$x^2+(4-2p)x+4=0$

$\Delta=0$

$(4-2p)^2-4.1.4=0$

$16-16p+4p^2-16=0$

$4p^2-16p=0$

$4p(p-4)=0 \Rightarrow p\neq 0$ ya da $p=4$ tür.

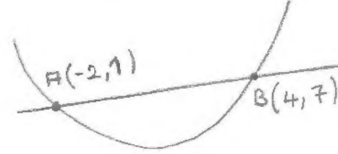
27) $f(x)=x^2-x-5$ parabolü ile $g(x)=x+3$ doğrusu A ve B noktalarında kesişiyorlar. $|AB|$ doğru parçasının uzunluğunu ve orta noktasını bulunuz?

$x^2-x-5=x+3$

$x^2-2x-8=0$

$(x-4).(x+2)=0$

$x=4$ ya da $x=-2$

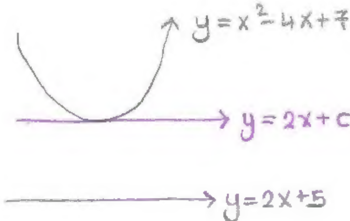


$|AB| = \sqrt{(-2-4)^2+(1-7)^2}$

$=\sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ (uzunluğu)

orta nokta: $\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = (1,4)$

28) $f(x)=x^2-4x+7$ parabolünün $y=2x+5$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz?



$x^2-4x+7=2x+c$

$x^2-4x+7-2x+c$

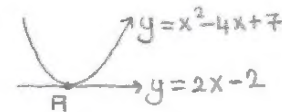
$x^2-6x+7-c=0$

$\Delta=0$

$36-4.1.(7-c)=0$

$36-28+4c=0$

$4c=-8 \Rightarrow c=-2$



$x^2-4x+7=2x-2$

$x^2-6x+9=0 \Rightarrow (x-3)^2=0 \Rightarrow x=3$ ve $y=4$

$A(3,4)$

29) $y=x^2-4ax+2a-1$ parabollerinin tepe noktalarının geometrik yer denklemini bulunuz?

$x=r=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x=2a \Rightarrow a=\frac{x}{2}$ yazılır.

$y=x^2-4.\frac{x}{2}.x+2.\frac{x}{2}-1$

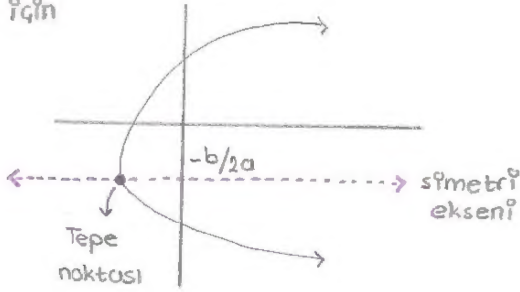
$\Rightarrow y=x^2-2x^2+x+1$

$y=-x^2+x+1$

☺ $x=ay^2+by+c$ fonksiyonuda bir paraboldür.

Tepe noktasının ordinatı $y=-\frac{b}{2a}$ dır ve simetri eksenidir.

a>0 için



a<0 için ise sola bakar.

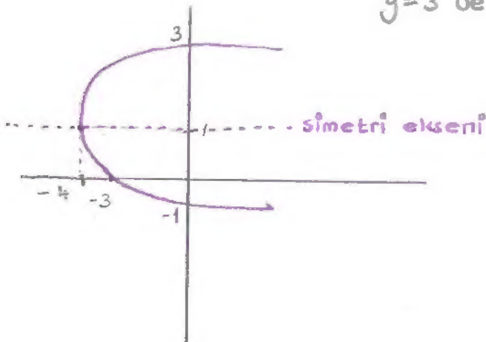
30) $x=y^2-2y-3$ parabolünün grafiğini çiziniz?

$y=-\frac{b}{2a} \Rightarrow y=1$
$y=1$ için $x=1-2-3=-4$ } $T(-4,1)$

$y=0$ için $x=-3$

$x=0$ için $y^2-2y-3=0 \Rightarrow (y-3).(y+1)=0$

$y=3$ ve $y=-1$



A(x,y) noktasının

- x eksenine göre simetriği $(x,-y)$
- y eksenine göre simetriği $(-x,y)$
- orijine göre simetriği $(-x,-y)$
- $y=x$ doğrusuna göre simetriği (y,x)
- $y=-x$ doğrusuna göre simetriği $(-y,-x)$
- $x=a$ doğrusuna göre simetriği $(2a-x,y)$
- $y=b$ doğrusuna göre simetriği $(x,2b-y)$
- (a,b) noktasına göre simetriği $(2a-x,2b-y)$

dir.

31) $y=x^2+2x+5$ parabolünün x eksenine göre simetriği nedir?

$(x,y) \longrightarrow (x,-y)$

$-y=x^2+2x+5 \Rightarrow y=-x^2-2x-5$

32) $y=x^2+2x+5$ parabolünün orijine göre simetriği nedir?

$(x,y) \longrightarrow (-x,-y)$

$-y=(-x)^2+2.(-x)+5$

$-y=x^2-2x+5 \Rightarrow y=-x^2+2x-5$

33) $y=x^2-2x+3$ parabolünün $x=2$ doğrusuna göre simetriği nedir?

$(x,y) \longrightarrow (4-x,y)$

$y=(4-x)^2-2.(4-x)+3$

$=16-8x+x^2-8+2x+3$

$=x^2-6x+11$

$\Rightarrow y=x^2-6x+11$

• **Parabolde eşitsizlik:** Önce parabolün grafiği çizilir ve sonra bir nokta kullanılarak sağladığı bölge bulunarak taranır.

34) $y < x^2-4x-12$ eşitsizliğinin belirttiği bölgeyi bulunuz.

$y=x^2-4x-12$ parabolü çizilir.

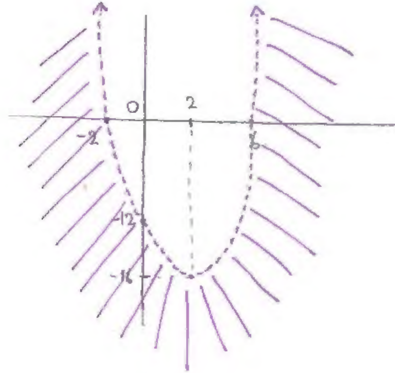
$r=2$ ve $k=f(2)=4-8-12=-16 \Rightarrow T(2,-16)$

$x=0$ için $y=-12$

$y=0$ için $x^2-4x-12=0$

$(x-6).(x+2)=0$

$x=6$ ve $x=-2$



35) $y \leq -x^2+4x$

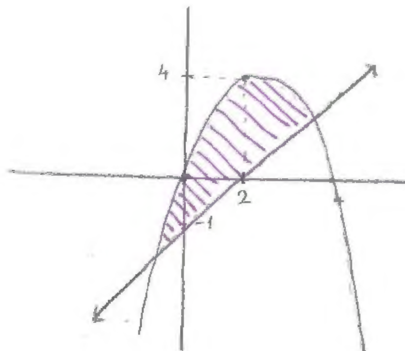
$2y-x+2 \geq 0$ eşitsizlik sisteminin belirttiği taralı bölgeyi bulunuz.

$y=-x^2+4x \Rightarrow r=\frac{-4}{-2}=2 \quad k=f(2)=-4+8=4$

$T(2,4)$

$x=0$ için $y=0$

$y=0$ için $-x^2+4x=0 \Rightarrow x(-x+4)=0 \Rightarrow x=0$, $x=4$



• $2y-x+2=0$ doğrusunu çizmek için

$x=0 \Rightarrow y=-1$

$y=0 \Rightarrow x=2$



$y=ax^2+bx+c$ parabolüne orjinden çizilen teğetler dik kesişiyorsa $\Delta=b^2-4ac=-1$ dir.

$y=ax^2+bx+c$ parabolüne parabolün ox eksenini kestiği noktalardan çizilen teğetler dik kesişiyorsa $\Delta=b^2-4ac=1$ dir.

35) Denklemi $y=x^2-ax+1$ olan parabol veriliyor. a nın hangi pozitif değeri için başlangıç noktasından parabole çizilen teğetler birbirine dik olur?

$\Delta=-1$

$(-a)^2-4.1.1=-1$

$a^2-4=-1$

$\Rightarrow a^2=3$

$a=\sqrt{3}$ ya da $a\neq-\sqrt{3}$ tür.